

# 门函数时域离散与模拟傅里叶变换误差分析

牛雪晨

(天津理工大学电气电子工程学院, 天津, 300384)

**摘要:** 给出了由离散信号频谱求解模拟信号频谱的过程, 通过门函数的傅里叶变换分析了其频域与抽样序列的傅里叶变换的误差来源, 并通过实例验证了该误差。对连续信号抽样造成频谱混叠是模拟信号傅里叶变换和离散信号傅里叶变换误差的根源, 要想消除其误差, 必须满足时域抽样定理。门函数频谱中频率是区域无穷大的, 所以针对特殊波形造成的这种误差是不可避免的。

**关键词:** 模拟信号; 离散信号; 傅里叶变换; 抽样定理; 误差分析

DOI:10.16520/j.cnki.1000-8519.2019.07.021

## Discrete Gate Function in Time Domain and Error Analysis of Simulated Fourier Transform

Niu Xuechen

(College of Electrical and Electronic Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin, 300384)

**Abstract:** The process of calculating analog signal spectrum from discrete signal spectrum is given. The error sources of Fourier transform in frequency domain and sampling sequence are analyzed by Fourier transform of gate function, and the error is verified by an example. Frequency spectrum aliasing caused by continuous signal sampling is the root of the error of Fourier transform of analog signal and discrete signal. To eliminate the error, the sampling theorem in time domain must be satisfied. The frequency of gate function spectrum is infinite, so the error caused by special waveform is inevitable.

**Key words:** analog signal; discrete signal; Fourier transform; sampling theorem; error analysis

### 1 模拟信号与时域离散信号傅里叶变换(DFT) [1-2]

时域离散信号与时域模拟信号是两种不同形式的信号, 其频谱也不同。如果时域离散信号是由时域模拟信号采样得到的, 那么二者之间的傅里叶变换呈现一定的关系。

为了方便表示离散信号和连续信号的关系, 用  $x(n)$  表示离散信号, 用  $x_a(t)$  表示模拟信号, 则离散信号和模拟信号之间的关系可用式(1)表示。

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) \quad (1)$$

其中  $T$  为模拟信号  $x_a(t)$  的采样间隔。而理想采样信号  $\hat{x}_a(t)$  与模拟信号  $x_a(t)$  的关系如式(2)所示。

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) \quad (2)$$

$\hat{x}_a(t)$  的连续傅里叶变换为式(3)。

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t)e^{-j\Omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-j\Omega nT} \quad (3)$$

设  $\omega = \Omega T$ , 并由式(1)可得式(4)或式(5)。

$$X(e^{j\omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega) \quad (4)$$

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \quad (5)$$

其中  $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ , 式(5)也可表示为式(6)。

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}) \quad (6)$$

由此可以看出时域离散信号的频谱也是模拟信号频谱的周期性延拓, 周期为  $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ , 因此由模拟信号采样得到时域离散信号时同样要满足采样定理, 否则会产生频域混叠现象。

### 2 离散信号的 DFT 与模拟信号的傅里叶变换 [2-3]

由式(5)变换得式(7)。

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[j(\Omega - \frac{2\pi}{T}k)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_a(j\Omega) \quad (7)$$

由  $x(n)$  的  $N$  点 DFT 可得式(8)。

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (8)$$

将式(8)带入式(7)可得式(9)。

$$X(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_a(j\frac{2\pi}{NT}k) = \frac{1}{T} \tilde{X}_a(j\frac{2\pi}{T_p}k) \quad (9)$$

其中  $T_p = NT$ , 式(9)说明了  $X(k)$  与  $X_a(j\Omega)$  的关系, 如果以频率  $f$  为自变量, 那么用角速度和频率表示的模拟信号傅里叶变换的关系为式(10)。

$$X'_a(f) = X_a(j\Omega)|_{\Omega=2\pi f} = X_a(j2\pi f) \quad (10)$$

将式(10)带入式(9)可得式(11)。

$$X(k) = \frac{1}{T} \tilde{X}'_a(kF) \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (11)$$

由此可得式(12),其中  $F = \frac{1}{T}$  为频谱间隔。

$$\tilde{X}'_a(kF) = TX(k) = T \text{DFT}[x(n)]_N \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (12)$$

由式(12)可知,可以通过对连续信号采样并进行 DFT 再乘以 T,近似得到模拟信号频谱的周期延拓函数在第一个周期  $[0, F_s]$  上的 N 点等间隔采样  $\tilde{X}'_a(kF)$ , 其中  $F_s = \frac{1}{T}$  为采样频率。

### 3 门函数离散傅里叶变换和模拟傅里叶变换误差根源<sup>[4-5]</sup>

对于门函数信号,图 1 表示的单个脉冲信号如公式(13)所示。

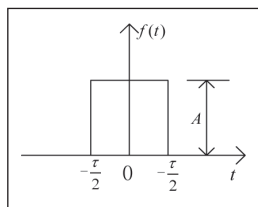


图 1 脉冲信号示意图

$$f(t) = \begin{cases} A, & \text{当 } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{当 } t < -\frac{\tau}{2} \text{ 或 } t > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (13)$$

对于公式(13)表示的门函数信号,其傅里叶变换为公式(14),频谱图如图 2 所示。

$$\begin{aligned} F'(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= A\tau \left[ \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right] = A\tau \text{Sa}(\pi f \tau) \end{aligned} \quad (14)$$

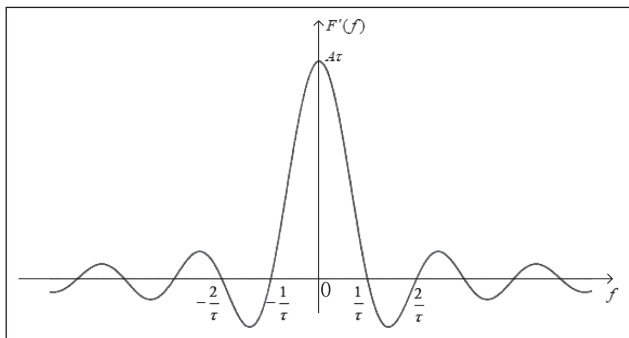


图 2 门函数信号的频谱图

由图 2 可以看出门函数信号的频谱是经压缩变换后的 Sa 函数,其主要能量集中在频率小于  $\frac{1}{\tau}$  范围内,随着频率的增加,衰减增大。因此,门函数信号进行抽样后的信号的频谱为图 2 所表示频谱的周期性延拓之和,延拓周期为  $\frac{1}{T}$ ,在此情况下,由于其频谱具有无限延展性,因此抽样后的门信号频谱会出现频谱混叠现象,如果抽样频率  $F_s = \frac{1}{T} \geq \frac{2}{\tau}$ ,虽可

以通过滤波形式恢复时域门函数信号,但是恢复后的时域信号是频谱在  $[-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}]$  范围混叠相加后的频谱经傅里叶逆变换后的时域信号,这个信号与门函数信号相比已经发生了变化,因此,采用抽样信号 DFT 来求解门函数信号频谱的方法会产生误差。如果抽样频率  $F_s = \frac{1}{T} < \frac{2}{\tau}$ ,那么频谱混叠更加严重,频谱误差也将随之变大。

在对模拟信号  $x_a(t)$  进行采样时,必须满足采样定理,即采样频率  $f_s \geq 2f_c$ ,  $f_s = \frac{1}{T}$ ,用于保证采样后的信号经低通滤波器后能够恢复原始信号。而通过上面的分析,时域有限的信号不可能是锐截止的,并且信号中不可避免地有一些高频杂散信号,对信号抽样后频谱存在混叠是无法避免的。

现在分析时域门函数信号频谱与其抽样信号的 DFT 误差大小。

假设求解门函数信号的频谱在  $F_0 (0 \leq F_0 \leq \frac{1}{\tau})$  处的值,通过门函数信号傅里叶变换直接求解得到式(15)。

$$F'(F_0) = A\tau \left[ \frac{\sin(\pi F_0 \tau)}{\pi F_0 \tau} \right] = A\tau \text{Sa}(\pi F_0 \tau) \quad (15)$$

而由式(12)对门函数信号采样后进行 DFT,然后再求解得到模拟信号傅里叶变换的方法得到的频谱如式(16)。

$$\tilde{F}'(F_0) = \tilde{F}'(kF) = TF(k) \quad (16)$$

其中  $F_0 = kF$ ,

$$\tilde{F}'(F_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F'_a \left[ j \left( F_0 - \frac{m}{T} \right) \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A\tau \text{Sa} \left[ \pi \left( F_0 - \frac{m}{T} \right) \tau \right] \quad (17)$$

通过式(17)和式(16)可以看出,由门函数信号直接进行傅里叶变换得到的频谱和抽样后进行 DFT 变换求的频谱是由误差的,误差来源为  $F'(f)$  以  $\frac{1}{T}$  为周期进行延拓在  $F_0$  处的值。

假设门函数信号宽度  $\tau = 2$ , 幅度  $A = 1$ , 采样间隔  $T = 0.2$  或  $T = 0.1$ , 进行 32 点或 64 点 DFT, 表 1- 表 3 给出了直接求解计算和通过 DFT 求解其频谱的对比。

表 1  $T = 0.2$ , 32 点 DFT

直接求解		通过 DFT 求解		误差
频率 ( $f$ )	幅度谱 ( $F'(f)$ )	k	$T F(k) $	$\Delta = T F(k)  - F'(f)$
0	2.0000	0	2.0000	0.0000
5/32	1.6939	1	1.6966	0.0027
10/32	0.9411	2	0.9471	0.0060
15/32	0.1325	3	0.1344	0.0019

表 2  $T = 0.2$ , 64 点 DFT

直接求解		通过 DFT 求解		误差
频率 ( $f$ )	幅度谱 ( $F'(f)$ )	k	$T F(k) $	$\Delta = T F(k)  - F'(f)$
0	2.0000	0	2.0000	0.0000
5/32	1.6939	2	1.6966	0.0027
10/32	0.9411	4	0.9471	0.0060
15/32	0.1325	6	0.1344	0.0019

表 3  $T = 0.1$ , 64 点 DFT

直接求解		通过 DFT 求解		误差
频率 ( $f$ )	幅度谱 ( $F'(f)$ )	k	$T F(k) $	$\Delta = T F(k)  - F'(f)$

(下转第 60 页)

表2 why 法问题点列表

item	why	why	why	why	why
漏光 漏光	导光板和胶框间隙过大 导光板和胶框之间间隙更大	设计预留膨胀区间	导光板吸水膨胀	网点深度深	辉度提升亮点下降
			PMMA 吸水率 > PC	PMMA 价格低, PC 耐刮较 PMMA 弱, PMMA 光效更高。	
		厚度薄更易翘, 需要更大的膨胀区间	裁切尺寸短. 厚度小	客户设计 BLU 更薄	其他材料目前厚度已达到极致, 导光板功能不能代替其他膜材
			厂商裁切制程能力不足		
		导光板未能组装在正确位置	导光板组装精度差	手动组装误差大	无组装治具或未使用
				治具组装精度不足	治具不是一体成型各组配件会用公差

表3 140 法则的解析思路

问题陈述	UF	HF	40 法则
我想要: 导光板和胶框间隙增大, 以阻止导光板变形但是我做不到, 因为间隙增大产生漏光	12	4	13/14/32/30/40/15/3
	13	29	5/1/37/18/27/16/3/2 5/2/10/4/17/34/26
我想要: 网点深度深, 以满足客户亮度规格但是我做不到, 因为会导致导光板易膨胀变形	4	4	13/14/39/37/35
	18	12	/32/3/27/30

### 3 Evaluate

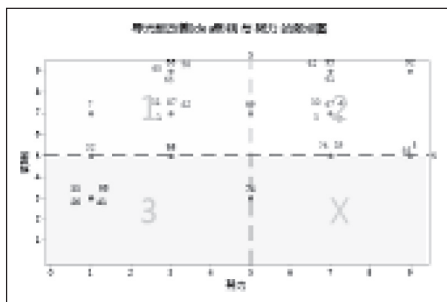


图1 普式矩阵影响与努力散点图

针对产生的改善想法进行分类, 运用普式矩阵(Pugh Matrix)对三大部材各自对策的改善难易程度进行分析

(上接第 50 页)

0	2.0000	0	2.0000	0.0000
5/32	1.6939	1	1.6945	0.0006
10/32	0.9411	2	0.9426	0.0015
15/32	0.1325	3	0.1330	0.0005

通过表 1 和表 2 对比可以发现, 在采样间隔  $T=0.2$  不变的情况下通过增加 DFT 变换的点数不能将误差减小, 因为增加点数只是对其 DFT 变换频谱在频率轴做了尺度变换。通过对比表 2 和表 3 可以发现, 增加抽样频率, 缩小采样间隔可以将误差减小, 因为增大采样频率, 缩小采样间隔增大了信号模拟傅里叶变换频谱周期延拓的周期, 由于 Sa 函数具有衰减性, 所以其它周期尾部衰减对于主区间的影响变小, 从而使误差变小。

### 4 结论

通过对门函数信号的连续傅里叶变换和其抽样信号 DFT 之间关系的分析, 得到了通过 DFT 求解模拟信号傅里叶变换

上图中, 位于区域 1 内的想法属于改善容易且影响较大的对策, 可以优先考虑导入使用; 区域 2 内想法属于影响大但是改善不容易的对策, 可以作为长期改善方向; 区域 3 内想法属于可以改善但是效果不明显的对策; 区域 X 内想法改善困难且效果较差, 一般情况下不考虑采用。

### 4 总结

通过 TRIZ 理论相关课程的学习, 共计产生 94 项改善想法, 下表是简单汇总和一些想法的实施情况:

表4 改善想法汇总

更换吸水热膨胀率小的 PC 材质导光板 (已验证)	背板的反射率小于底反, 导光板边缘减弱光的反射 (已验证)
将 1、3 区胶框长度设计短, 增加卡点, 角落增加受力承载面 (TRIZ)	将导光板网点印刷改为网点与 PMMA 混合成型, 使导光网点包覆在导光板中 (专利)
更换胶框固定胶带胶带材质增强粘性 (已验证)	胶铁一体化 <sup>[2]</sup> (已实施)

另外, 本项目通过 TRIZ 理论共产生 15 项专利, 下表是部分专利目前的状态。

表5 项目专利列表

专利名称	状态
一种新型胶框及组装方式	撰写中
一种新型导光板网点设计方式	申请中
一种反射片及其控制方法、背光模组、显示装置 (201810276496.3)	通过
弹簧式遮光胶带检验治具 (X1800037CQCT)	通过

实验验证表明, 通过调整底反射与导光板单边的宽度差; 使用 PC 材质导光板; 导入导光板限位治具以及去除漏光位置网点等方式均可以大幅度改善背光源的漏光情况, 且相对较容易实现, 后续可以考虑在所有窄边框机种中平行展开。

### 参考文献

- [1] 刘亮, 王向楠, 赵德友, 等. TFT-LCD 移动显示窄边框技术进展 [J]. 液晶与显示, 2013, 28(2): 228-232.
- [2] 梁华峰. 一种胶铁一体化液晶显示模组 [P]. CN204101840U, 2015.

误差的来源, 通过实例验证了误差大小, 在采样间隔不变的情况下通过增加 DFT 变换的点数不能减小误差, 通过减小采样间隔加大采样信号模拟傅里叶周期延拓的周期可以减小误差。

### 参考文献

- [1] 吴大正. 信号与线性系统分析 (第 4 版) [M]. 高等教育出版社, 2005.
- [2] 高西全, 丁玉美. 数字信号处理 (第三版) [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008.
- [3] 陈怀琛. Matlab 及在电子信息课程中的应用 (第三版) [M]. 北京: 电子工业出版社, 2006.
- [4] 林爱英, 滕红丽, 袁超, 等. DFT 在信号谱分析中的应用 [J]. 安徽工业大学学报: 自然科学版, 2011(2): 192-196.
- [5] 乔建华, 张雪英. 用 DFT 对连续信号谱分析的误差问题 [J]. 现代电子技术, 2014(13): 53-56.